Marius Burtea **Georgeta Burtea**
Mihaela Barabaş, Aurelia Bălan, Geta Bercaru, Crina Bogdan, Rodica Chiriac, Ioana Costache, Livia Gănescu, Maria Ionescu, Valentina Lungu, Doina Mihăescu, Cătălin Niţică, Violeta Năstăsoiu, Veronica Rotaru, Laura Vasilescu

Auxiliarul școlar a fost aprobat prin OMEN nr. 3022/08.01.2018

CLASA a X-a

MATEMATICĂ

Probleme și exerciții
Teste

- metode de numărare
- matematici financiare
- elemente de geometrie

profilul tehnic

CAMPION
București 2018

CUPRINS

Capitolul

I METODE DE NUMĂRARE

1 MULŢIMI FINITE ORDONATE. PERMUTĂRI.

Breviar teoretic

- O mulţime A este **finită** dacă este mulţimea vidă sau dacă există un număr natural n astfel încât elementele ei se pot numerota $a_1, a_2, ..., a_n$.

  n se numeşte **cardinalul** multimii A.
- O mulţime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o *mulţime ordonată.*
- Se numeşte **permutare** a mulţimii finite A orice mulţime ordonată care se formează cu elementele sale.
- Numărul permutărilor mulţimii A cu n elemente se notează P_n şi este egal cu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.

  Aşadar $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \overset{not}{=} n!$

  Conventie: $0! = 1$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Se dă mulţimea $A = \{-3,1,4\}$. Să se scrie toate permutările mulţimii A.

Soluţie

Mulţimea A are cardinalul $n = 3$. Rezultă că ea are $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ permutări. Acestea sunt : $(-3,1,4),(-3,4,1),(1,-3,4),(1,4,-3),(4,-3,1),(4,1,-3)$.

2. Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma folosindu-se numai cifrele 0,1,2,3?

Soluţie

Problema revine la a determina numărul de permutări ale mulţimii $A = \{0,1,2,3\}$ din care trebuie excluse acele permutări care au 0 pe prima poziţie, căci un număr natural nu poate avea prima cifră nulă.

Aşadar, numărul numerelor formate cu 4 cifre distincte din A este egal cu: $P_4 - P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

3. Să se determine numerele naturale care sunt soluţii ale ecuaţiilor:

a) $(n+2)! = 20n!$; b) $\dfrac{2(n+1)!}{(n-1)!} - \dfrac{(n+2)!}{n!} = 4$.

Soluţie

a) Se scrie $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$. Ecuaţia devine: $n!(n+1)(n+2) = 20n!$. Împărţim ecuaţia cu $n! \neq 0$ şi se obţine $(n+1)(n+2) = 20$ care este echivalentă cu $n^2 + 3n - 18 = 0$. Se obţin

soluţiile $n_1 = 3$, $n_2 = -6$.

Punem condiția ca $n \in \mathbb{N}$ și se reține doar soluția $n = 3$.

b) Înlocuim $(n+1)! = (n-1)!n(n+1)$ și $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$.

Ecuația se transformă succesiv astfel:

$$\frac{2(n-1)!n(n+1)}{(n-1)!} - \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!} = 4 \Leftrightarrow 2n(n+1) - (n+1)(n+2) = 4 \Leftrightarrow n^2 - n - 6 = 0.$$

Se obțin soluțiile $n_1 = 3$, $n_2 = -2$. Condițiile de existență a factorilor sunt:

$n-1 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$, $n+2 \in \mathbb{N}$.

Ca urmare, soluția ecuației inițiale este $n = 3$.

4. a) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea $k!k = (k+1)! - k!$.

b) Să se calculeze suma: $1!1 + 2!2 + 3!3 + ... + 20!20$.

Soluție

a) Avem: $(k+1)! - k! = k!(k+1) - k! = k!(k+1-1) = k!k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) Folosim identitatea de la punctul a) și suma se scrie:

$1!1 + 2!2 + 3!3 + ... + n!n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + (21! - 20!) = -1! + 21! = 21! - 1$.

Exerciții și probleme propuse

1. Calculați:

a) $\frac{4!+3!}{2!}$; c) $(8! - 7! + 6!) \cdot \frac{4!}{6!}$; e) $\frac{8! - 7!}{6!}$;

b) $(3!)!$; d) $\frac{2010!}{2008!}$; f) $\frac{9! + 10!}{11 \cdot 7!}$.

2. Câte mulțimi ordonate se pot construi folosind literele a, b și c?

3. Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuațiile:

a) $n! = 6$; b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$; c) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 20$;

d) $3n(n+1)! = (n+2)!$; e) $1! + 2! + ... + x! = 33$; f) $\frac{(2x+2)!}{(2x)!} = 2(4! + 8)$.

4. Câte numere de 3 cifre distincte, divizibile cu 2 există ?

5. Câte numere naturale de 5 cifre distincte se pot forma cu cifrele din mulțimea $\{0;2;4;6;8\}$?

6. Câte funcții bijective se pot defini de la mulțimea $A = \{a, b, c\}$ la ea însăși?

7. Calculează suma tuturor cifrelor care apar la scrierea numerelor de la 1 la 20.

8. Un elev are de dat 3 lucrări în 3 zile. În câte moduri pot fi aranjate cele 3 lucrări pe zile? Dar dacă prima lucrare se dă obligatoriu la matematică?

9. În câte moduri se pot așeza pe un raft 10 cărți de autori diferiți, aranjarea fiind făcută alfabetic?

10. Rezolvă sistemul în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $\begin{cases} 5! \cdot x - 2! \cdot y = 116 \\ P_3 \cdot x + P_4 \cdot y = 54 \end{cases}$.

11. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, ..., 2n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât fiecare număr impar să fie de rang impar?

12. În câte moduri se pot aşeza la o masă rotundă 3 fete şi 3 băieţi, astfel încât să nu fie 2 fete sau 2 băieţi unul lângă altul?

13. Câte numere naturale formate din 4 cifre distincte, cifre divizibile cu 3 se pot forma?

14. Calculaţi suma tuturor cifrelor pare cuprinse în numerele de la 1 la 100.

15. Rezolvaţi ecuaţiile în $\mathbb{N}^*$:

a) $(n+2)!-(n+1)!=24\cdot(n+1)^2$;

b) $P_{2n}:P_n=1680$;

c) $(n+4)!(n+2)=48(n+3)!$;

d) $3(n+2)!+5(n+1)!=51n!$

e) $(n+3)!+18(n+1)!=10(n+2)!$;

f) $\dfrac{(n+3)!}{(n-1)!}=\dfrac{14(n+1)!}{(n-2)!}$;

g) $\dfrac{n!(n+2)}{n!+(n-1)!}=\dfrac{48}{7}$.

16. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele inecuaţii:

a) $\dfrac{(2n-5)!}{(2n-7)!}>420$; b) $\dfrac{(n+5)!}{(n+4)!}>2$; c) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)!}\geq 0$.

17. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} P_x:P_y=\dfrac{(x-1)!}{(y-1)!}; \; x,y\in\mathbb{N}^*. \\ P_3\cdot x-P_2\cdot y=8 \end{cases}$

18. Calculaţi: $\left(\dfrac{2}{2!}+\dfrac{7}{3!}+...+\dfrac{n^2-2}{n!}\right)+\dfrac{n+2}{n!}$; $n\in\mathbb{N}$; $n\geq 2$.

19. Să se arate că:

a) $\dfrac{m!\cdot n!}{m!+n!}+\dfrac{n!\cdot p!}{n!+p!}+\dfrac{p!\cdot m!}{p!+m!}\leq\dfrac{m!+n!+p!}{2}$; b) $\dfrac{m!}{n!+p!}+\dfrac{n!}{m!+p!}+\dfrac{p!}{m!+n!}\geq\dfrac{3}{2}$, $\forall m,n,p\in\mathbb{N}^*$.

20. Să se aducă la o formă mai simplă: $\dfrac{2^1\cdot 1}{3!}+\dfrac{2^2\cdot 2}{4!}+\dfrac{2^3\cdot 3}{5!}+...+\dfrac{2^{n-1}\cdot(n-1)}{(n+1)!}$; $n\geq 2$.

21. Să se calculeze câte numere naturale de 10 cifre au suma cifrelor 3.

22. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr natural de 5 cifre acesta să fie divizibil cu 4.

23. Câte numere naturale de 6 cifre distincte se pot forma, astfel încât cifrele 2 şi 3 să fie alăturate?

24. Calculaţi:

a) $1!\cdot 1+2!\cdot 2+...+n!\cdot n$; b) $\sum_{k=1}^{n}k!\cdot(k^2+k+1)$; c) $\sum_{k=2}^{n}\dfrac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2!)}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

25. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ ecuaţia: $(x!+1)^{x!}=(x!)^y$.

26. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} P_{x+y+4}=20\cdot P_{x-y+2} \\ P_x=P_y \end{cases}$.

27. Să se demonstreze că: $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_p!}=\dfrac{(n-1)!}{(n_1-1)!\cdot n_2!\cdot...\cdot n_p!}+...+\dfrac{(n-1)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot...\cdot(n_p-1)!}$, unde $n_1+n_2+...+n_p=n$.

28. Câte numere naturale de 3 cifre de forma $\overline{m!n!p!}$ există? ($m\neq n\neq p\neq m$)

29. Demonstraţi că $\left(x^2\right)!$ nu este pătrat perfect, $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geq 2$.

30. Câte soluţii naturale are ecuaţia: $m! \cdot n! \cdot p! = m! + n! + p!$?

31. Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că ecuaţia: $x^2 - P_n \cdot x + n! + 3 = 0$ admite soluţii egale.

32. Să se arate că nu există x, y, z naturale diferite, astfel încât P_x, P_y şi P_z să fie în progresie geometrică.

33. Să se studieze dacă P_x, P_y şi P_z pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

2 ARANJAMENTE.

Breviar teoretic

Se consideră mulţimea finită A cu n elemente şi $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

- Submulţimile ordonate cu k elemente ale mulţimii A se numesc *aranjamente de n elemente luate câte k* ale mulţimii A.
- Numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k ale mulţimii A este numărul $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

$\mathrm{A}_n^0 = 1;\ \mathrm{A}_n^{k+1} = (n-k)\mathrm{A}_n^k;\ \mathrm{A}_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se scrie aranjamentele de 4 elemente luate câte 2 ale mulţimii $A = \{a, b, c, d\}$.

Soluţie

Scriem toate submulţimile ordonate formate cu 2 elemente ale mulţimii A. Avem: $(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(b,c),(c,b),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)$. S-au obţinut 12 aranjamente de 4 elemente luate câte 2, adică $\mathrm{A}_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2!} = 12$.

2. Câte numere de 6 cifre diferite se pot forma?

Soluţie

Fie $\overline{abcdef}$ număr natural cu 6 cifre distincte luate din mulţimea cifrelor $\{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ şi $a \neq 0$.

Numărul acestora este dat de numărul de submulţimi cu 6 elemente distincte luate din cele 10 elemente ale mulţimii cifrelor, din care scădem submultimile ordonate de 5 elemente luate din cele 9 cifre nenule $\{1, 2, 3, ..., 9\}$.

Aşadar, se obţine numărul $\mathrm{A}_{10}^6 - \mathrm{A}_9^5$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\mathrm{A}_{n+2}^5 = 18\mathrm{A}_n^4$; b) $8\mathrm{A}_{x+1}^5 = 3\mathrm{P}_3 \cdot \mathrm{A}_x^5$.

Soluţie

a) Se explicitează aranjamentele din cei doi termeni şi se obţine:

$$\frac{(n+2)!}{(n-3)!} = \frac{18n!}{(n-4)!} \Leftrightarrow (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = 18(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)\left[(n+1)(n+2)-18(n-3)\right]=0.\quad (1)$

Condiţia de existenţă a aranjamentelor conduce la $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$.

Rezultă că din (1) se obţine numai $(n+1)(n+2)-18(n-3)=0$, adică $n^2-15n+56=0$ cu soluţiile $n_1=7,\ n_2=8$.

b) Avem succesiv: $\dfrac{8\cdot(x+1)!}{(x-4)!}=3\cdot 3!\cdot\dfrac{x!}{(x-5)!}$ cu condiţia $x\in\mathbb{N},\ x\geq 5$

$$\Leftrightarrow \frac{8\cdot(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)}{(x-4)!}=\frac{3\cdot 6\cdot(x-5)!(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)\cdot x}{(x-5)!},\ x\geq 5,$$

$x\in\mathbb{N} \Leftrightarrow 8(x+1)=18(x-4),\ x\in\mathbb{N},\ x\geq 4 \Leftrightarrow 5x-40=0,\ x\in\mathbb{N},\ x\geq 4$. Se obţine soluţia $x=8$.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$?

2. a) Câte numere de 4 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,3,4,5\}$?

b) Care este cel mai mic şi cel mai mare dintre aceste numere?

c) Câte dintre ele sunt divizibile cu 2; dar cu 5?

3. Se consideră 4 puncte în plan, oricare 3 dintre ele fiind necoliniare. Câţi vectori determină aceste puncte?

4. Să se determine câte numere naturale de 3 cifre distincte şi impare există.

5. Un sportiv trebuie să susţină 4 probe în 10 zile. În câte moduri pot fi programate aceste probe ştiind că nu pot fi date două probe în aceeaşi zi.

6. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Dacă vor face schimb de fotografii între ei, de câte fotografii va fi nevoie?

7. Să se calculeze numerele:

a) $A_6^4-A_6^2$; c) $A_3^2+A_4^2+A_6^2+A_8^2$; e) $\left(A_6^4-A_6^5\right):\left(A_5^3-A_5^4\right)$.

b) $A_5^2\cdot A_7^3$; d) $\left(A_7^4+A_7^5\right):A_7^3$;

8. Ordonaţi crescător numerele: $a=A_{10}^2,\ b=A_8^3,\ c=A_9^1$.

9. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţiile:

a) $A_{n+3}^2=72$; e) $A_n^3-A_{n-1}^3=36$;

b) $A_{n+2}^n=360$; f) $2A_{n+2}^2-A_{n+3}^2=10$;

c) $A_{2n+3}^2=110$; g) $5A_{n+3}^2-4A_{n+2}^2=70$.

d) $A_n^8+A_n^7=9A_n^6$;

10. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $A_x^3+3A_x^2=\dfrac{1}{2}P_{(x+1)}$; d) $A_x^2+A_{x+1}^2+A_{x+2}^2=38$;

b) $A_x^4+A_x^3=10\cdot(x-2)\cdot A_{x-1}^2$; e) $\left(A_n^7-A_n^5\right):A_n^5=89$.

c) $P_x+A_x^{x-1}=14P_{x-1}$;

11. Să se determine $n\in\mathbb{N}$ pentru care au loc relaţiile:

a) $A_n^2<30$; d) $4A_{n+2}^2-3A_{n+1}^1\geq 0$

b) $11A_n^2 > 2A_{n+1}^3$; e) $A_{n+3}^3 : A_{n+2}^2 \le 8$.

c) $2A_{n+2}^2 - A_{n+3}^2 \le 25$;

12. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} A_x^{y+1} = 2A_x^{y-1} \\ A_{2x+1}^2 = 105 \end{cases}$; b) $\begin{cases} A_x^y + 2A_{x+1}^y = 30 \\ A_4^y - P_3 = 6. \end{cases}$; c) $\begin{cases} A_{2y}^{y+1} = 360 \\ A_{x+1}^y = 210 \end{cases}$.

13. Demonstraţi că numerele A_8^1, A_8^2, A_8^3 nu sunt în progresie geometrică.

14. Pentru ce valori ale lui $k \in \mathbb{N}$ numerele A_{k+3}^k, A_{k+2}^k, A_{k+1}^k sunt în progresie aritmetică?

3 COMBINĂRI.

Breviar teoretic

Fie mulţime finită A cu n elemente şi $k = \{0,1,2,...,n\}$.

- Submulţimile mulţimii A având fiecare câte k elemente se numesc *combinări de n elemente luate câte k.*
- Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează C_n^k şi este dat de formula $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.
- Câteva formule utile:

a) $C_n^0 = C_n^n = 1$, $A_n^0 = 1$, $A_n^n = n!$.

b) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (formula combinărilor complementare).

c) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (formula de recurenţă a combinărilor).

d) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ (numărul submulţimilor unei mulţimi cu n elemente).

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet al clasei format din 3 fete şi 2 băieţi.

Soluție

Clasa este formată din 12 fete şi 10 băieţi.

3 fete se pot alege dintre 12 fete în C_{12}^3 moduri.

2 băieţi se pot alege dintre cei 10 băieţi în C_{10}^2 moduri.

Rezultă că un comitet din 3 fete şi 2 băieţi se poate alege în $C_{12}^3 \cdot C_{10}^2$ moduri.

2. Se consideră mulţimea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul de submulţimi ale mulţimii A care au 3 elemente dintre care exact un element este număr par.

Soluție

Mulţimea A conţine 3 numere pare şi 3 numere impare.

Fie $\{x, y, z\}$ o submulţime a mulţimii A cu x număr par şi y, z impare. Elementul x poate fi ales în C_3^1 moduri din mulţimea A iar elementele y, z pot fi alese în C_3^2 moduri.

Rezultă că numărul total de submulţimi cu 3 elemente ale lui A care conţin un singur număr par este egal cu produsul $C_3^1 \cdot C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

3. Să se rezolve ecuația $C_{n+2}^1 + n = n^2 + 3,\ n \in \mathbb{N}$.

Soluție

Explicităm fiecare element combinatoric şi se obţine succesiv:

$$\frac{(n+2)!}{(n+2-1)!1!} + n = n^2 + 3,\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0.$$

Se obţine soluţia $n = 1$.

4. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} 8C_x^{y-3} = C_x^{y-2} \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Soluție

Prima ecuaţie a sistemului se transformă succesiv astfel:

$$8 \cdot \frac{x!}{(x-y+3)!(y-3)!} = \frac{x!}{(x-y+2)!(y-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{(x-y+2)! \cdot (x-y+3) \cdot (y-3)!} = \frac{1}{(x-y+2)!(y-3)!(y-2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x-y+3} = \frac{1}{y-2} \Leftrightarrow 8y - 16 = x - y + 3 \Leftrightarrow x - 9y = -19.$$

Sistemul de ecuaţii se rescrie astfel: $\begin{cases} x - 9y = -19 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Scădem ecuaţiile membru cu membru şi obţinem ecuaţia $7y = 21$ cu soluţia $y = 3$, iar $x = 8$.

Condiţiile de existenţă ale combinărilor din sistem sunt: $x \geq y - 3,\ x \geq y - 2,\ x, y \in \mathbb{N}$.

Aşadar sistemul are soluţia $x = 8,\ y = 3$.

5. O mulţime finită are $\frac{8}{15} \cdot C_{10}^3$ submulţimi. Să se determine cardinalul mulţimii A.

Soluție

Numărul submulţimilor mulţimii A cu n elemente este egal cu 2^n. Aşadar,

$$\frac{8}{15} \cdot C_{10}^3 = 2^n \Leftrightarrow \frac{8}{15} \cdot \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 2^n \Leftrightarrow \frac{8}{15} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2^n \Leftrightarrow \frac{8}{15} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 = 2^n \Leftrightarrow$$

$$8 \cdot 2 \cdot 4 = 2^n \Leftrightarrow 2^6 = 2^n \Leftrightarrow n = 6.$$

Rezultă că mulţimea A are 6 elemente.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Să se calculeze numerele:

a) $C_7^3 - C_7^4,\ C_6^0 + C_6^2 - C_6^4 + C_6^6$; b) $2C_4^2 - 3C_5^1$; c) $C_{11}^3 - C_{11}^8 + C_{11}^{11}$;

d) $\frac{C_{10}^4}{C_{10}^6}$; e) $C_9^3 + A_8^1 - P_3$; f) $C_{2011}^{11} - C_{2011}^{2000} + 1$.

2. Să se calculeze:

a) $C_n^4,\ C_{n+1}^3,\ C_{2n}^2$; b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4$;